TOÁN CAO CẤP - HỌC LIỆU ONLINE

Biên soạn bởi: *Tập thể giáo viên Toán Cao Cấp - Khoa Toán Kinh Tế - UEL*

Ngày 11 tháng 12 năm 2019

Giới thiệu môn học

Môn toán cao cấp cung cấp những kiến thức nền tảng và bổ trợ cho các môn như kinh tế vi mô, kinh tế vĩ mô, lý thuyết xác suất, thống kê ứng dụng, kinh tế lượng, dự báo kinh tế, v.v.

Mặc dù tất cả các trường uy tín trên thế giới đều có học phần tương tự toán cao cấp cho sinh viên năm nhất, nhiều sinh viên và giảng viên đại học ở Việt Nam chưa hiểu "vì sao cần học những kiến thức cơ sở" này? Liên hệ một chút, khi muốn học chơi cờ, chơi đàn hay một môn gì mới, ban đầu chúng ta cần hiểu rõ về "cách chơi", "luật chơi", có đúng vậy không? Các môn khoa học nói chung và toán nói riêng cũng hơi giống như vậy! Nếu ta muốn sử dụng được các phương pháp toán học định lượng để nghiên cứu các hiện tượng hay quy luật trong thực tiễn, ta cần biết các kiến thức cơ sở của toán. Những cơ sở cơ bản nhất nằm trong đại số tuyến tính và giải tích. Đó là nội dung chính của học phần này.

Chú ý rằng, hiểu rõ "luật chơi" chỉ là điều kiện cần, chưa bảo đảm để bạn sẽ trở thành kiện tướng cờ thực sự hay là một nghệ sỹ với những bản nhạc tuyệt vời. Muốn đạt tới đó, cần có đủ đam mê và quá trình rèn luyện.

Hướng tới giáo dục 4.0, trong tài liệu này bên cạnh khối kiến thức căn bản về đại số và giải tích, chúng tôi bổ sung một số yếu tố mới, với mục tiêu:

1. Đưa môn học đến gần hơn với các môn cơ sở ngành và môn chuyên ngành. Đặc biệt chú ý tới các ứng dụng trực tiếp của kiến thức đại số tuyến tính, giải tích trong kinh tế, kinh doanh và quản lý.

2. Xây dựng hệ thống bài học gắn với các môn học khác và gắn với thực tiễn. Hình thức học tập đa dạng để tạo điều kiện cho việc triển khai lớp học linh hoạt, phù hợp với nhiều đối tượng chuyên ngành khác nhau.

3. Tạo thói quen và rèn luyện kỹ năng tìm kiếm, phân tích, tổng hợp, làm việc nhóm, thuyết trình ... thông qua các bài tập mở, bài tập nhóm, bài tập trình bày.

4. Giới thiệu cách sử dụng phần mềm, khuyến khích sinh viên thử nghiệm lập trình để xử lý những bài tập tính toán phức tạp, tiếp cận xử lý các bài toán trong thực tiễn.

Chương 1

Ma trận và hệ phương trình tuyến tính

Sau khi học xong chương này, người học có những kĩ năng và kiến thức sau:

1. Hiểu về ma trận, hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng của chúng trong kinh tế và trong đời sống thực tế.
2. Tính toán được với các phép toán thông dụng trên ma trận và sử dụng được các phép biến đổi sơ cấp của ma trận.
3. Phân tích được các mô hình tuyến tính trong kinh tế: mô hình cân bằng cung cầu, mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô, mô hình Input-Output của Leontief.
4. Sử dụng được máy tính cầm tay và các phần mềm hỗ trợ để tính toán trên ma trận, hệ phương trình.

1.1 Ma trận và các phép toán

Trong thực tế, chúng ta thường gặp nhiều bài toán cần xử lý nhiều dữ liệu cùng tính chất. Để thuận tiện cho việc quan sát và làm việc trên các dữ liệu như vậy, người ta có thể sắp xếp chúng thành các hàng, cột (các "ma trận hàng, cột" hay "vectơ") hoặc các bảng gồm có nhiều cột, nhiều hàng (các "ma trận"). Trên các cột hay các bảng như vậy, người ta có thể xây dựng các phép toán để xử lý dữ liệu theo từng mục đích cụ thể. Ví dụ bảng tổng số lượng bán ra của một cửa hàng trà sữa với hai loại trà tương ứng với 3 cỡ ly to, vừa và nhỏ sau mỗi ngày là một bảng 2 x3 như sau:

	Ly nhỏ (200ml)	Ly vừa (400ml)	Ly lớn (600ml)
Trà sữa Matcha	112	358	289
Hồng trà	140	321	254

1.1.1 Khái niệm ma trận

Ma trận là một bảng số hình chữ nhật gồm m dòng và n cột. Ma trận ký hiệu bằng các chữ cái A, B, C.... và biểu diễn dưới dạng sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

hoặc dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma trận ở trên có cấp $m \times n$.

1.1.2 Một số dạng ma trận

1. *Ma trận vuông* là ma trận mà số dòng bằng với số cột. Một ma trận vuông cấp $n \times n$ còn được gọi tắt là ma trận vuông cấp n. Trong một ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n \times n}$, các phần tử $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là các phần tử thuộc đường chéo chính của ma trận.

2. Ma trận chéo là ma trận vuông mà các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0.

3. Ma trận tam giác trên (dưới) là ma trận vuông mà các phần từ nằm dưới (trên) đường chéo chính đều bằng 0.

4. Ma trận đơn vị là ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.

5. Ma trận cột (dòng) là ma trận chỉ có một cột (dòng).

6. Ma trận không (kí hiệu bởi O) là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng 0.

1.1.3 Các phép toán trên ma trận

1. Phép cộng (trừ) hai ma trận A và B được thực hiện bằng cách cộng (trừ) các phần tử ở các vị trí tương ứng. Như vậy hai phép toán này chỉ thực hiện được khi hai ma trận A và B có cùng cấp.

2. Phép nhân một ma trận với một số thực λ được thực hiện bằng cách nhân λ tới tất cả các phần tử của ma trận đó.

3. Phép nhân ma trận A cho ma trận B được thực hiện bằng cách lấy từng dòng của A (từ trên xuống dưới) nhân vô hướng với từng cột của ma trận B (từ trái sang phải). Phép nhân AB chỉ thực hiện được khi số cột của A bằng với số dòng của B.

4. Phép chuyển vị của A được thực hiện bằng cách chuyển dòng của A thành cột. Ma trận chuyển vị của A được kí hiệu là A^t

1.2 Ma trận bậc thang dòng và các phép biến đổi sơ cấp

Một ma trận được gọi là ma trận bậc thang dòng nếu

- Dòng có tất cả các phần tử bằng 0 luôn nằm dưới các dòng khác không.
- Với hai dòng khác 0 bất kì, phần từ khác 0 đầu tiên tính từ trái sang phải của dòng trên luôn ở bên trái so với của các dòng dưới.

Các phép biến đổi sơ cấp (viết tắt là bđsc):

1. Đổi chỗ hai dòng cho nhau: $d_i \leftrightarrow d_j$.

2. Nhân một dòng với một số khác 0 $d_i \mapsto \alpha d_i, \alpha \neq 0$.

3. Thêm (bớt) vào một dòng, một tích vô của một số với một dòng khác $d_i \mapsto d_i + \alpha d_j$.

Ví dụ.

1.3 Hạng của ma trận.

Hạng của một ma trận A là số dòng khác 0 của ma trận bậc thang tương ứng với nó, và được kí hiệu là rank(A).
Ví dụ. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bằng các phép biến đổi sơ cấp, ta đưa ma trận A về dạng bậc thang theo dòng như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \mapsto d_3 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \mapsto d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, $\operatorname{rank}(A) = 2$.

1.4 Định thức

Định thức của một ma trận A, kí hiệu là $\det(A)$, hoặc là $|A|$, được định nghĩa bằng phương pháp quy nạp (công thức Laplace) như sau:

- Nếu $A = (a)_{1\times 1}$ thì $\det A = |A| = a$.
- Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ thì $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ thì $\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.
- Nếu $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thì định thức của A khai triển theo dòng thứ i sẽ là

  $$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

  trong đó A_{ij} là tích của $(-1)^{i+j}$ nhân với định thức của ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ A bằng cách xoá đi dòng i, cột j. A_{ij} được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

Lưu ý. Ngoài khai triển theo dòng, định thức còn có thể được khai triển theo cột bằng công thức tương tự.

1.4.1 Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp

Định thức của ma trận bậc thang

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

là $\det(A) = 2.5.7 = 70$. Như vậy, định thức của ma trận tam giác trên (vuông) bằng với tích các phần tử trên đường chéo (chính). Mà ta đã biết các phép biến đổi sơ cấp có thể đưa ma trận về dạng bậc thang (trong trường hợp của ma trận vuông thì một ma trận bậc thang theo dòng là một ma trận tam giác trên), nên ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp để đưa ma trận về dạng bậc thang và từ đó tính định thức. Tuy nhiên, các phép biến đổi sơ cấp sẽ làm thay đổi giá trị định thức như sau:

1. Phép bđsc thứ nhất $d_i \leftrightarrow d_j$ làm cho định thức đổi dấu.
2. Phép bđsc thứ hai $d_i \mapsto \alpha d_i$ làm cho định thức mới bằng α lần định thức cũ.
3. Phép bđsc thứ ba $d_i \mapsto d_i - \alpha d_j$ không làm thay đổi giá trị định thức.

Ví dụ 1.4.1. Tính định thức của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ta thực hiện các phép bđsc như sau để đưa A về dạng bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2 \mapsto \frac{1}{2}d_2]{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_3 - 3d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_3 + 5d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận bậc thang sau cùng bằng với 3. Tuy nhiên, trong quá trình bđsc ta đã sử dụng phép bđsc $d_1 \leftrightarrow d_2$ (làm thay đổi dấu của định thức) và $d_2 \mapsto \frac{1}{2}d_2$ (làm định thức thay đổi $\frac{1}{2}$ lần). Nên $\det A = (-1) \times 2 \times 3 = -6$.

1.5 Ma trận khả nghịch

Ma trận vuông A cấp $n \times n$ được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại một ma trận vuông B cùng cấp sao cho $AB = BA = I_n$, trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n. Khi đó B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, và được kí hiệu bởi A^{-1}.

Định lý 1.5.1. Ma trận vuông A cấp n khả nghịch khi và chỉ khi một trong hai điều kiện tương đương sau được thoả mãn:

- $\operatorname{rank}(A) = n$,
- $\det A \neq 0$.

Thuật toán tìm nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp:

1. Để tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận vuông A cấp n, ta lập ma trận mở rộng $[A|I_n]$.
2. Biến đổi sơ cấp trên các dòng của $[A|I_n]$ để đưa nó về dạng $[I_n|B]$. Nếu không thể biến đổi được như thế, nghĩa là trong quá trình biến đổi sơ cấp, ma trận bên trái xuất hiện một dòng bằng không thì A không khả nghịch. Ngược lại, nếu thực hiện được thì A khả nghịch và nghịch đảo của A là ma trận B.

Thuật toán tìm nghịch đảo của ma trận vuông A bằng định thức:

1. Tính $\det A$. Nếu $\det A = 0$ thì kết luận là A không khả nghịch. Nếu $\det A \neq 0$ thì kết luận là A khả nghịch và chuyển sang bước tiếp theo để tìm nghịch đảo của A.
2. Tìm *ma trận phụ hợp* của P_A, là ma trận cùng cấp với A và được định nghĩa bởi $(P_A)_{ij} = A_{ij}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.
3. Ma trận nghịch đảo của A lúc này được xác định bởi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A^t$.

1.6 Hệ phương trình tuyến tính - Định lý Kronecker-Capelli

Xét một hệ phương trình tuyến tính như sau:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = e_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = e_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = e_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = e_4 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên tương đương ở dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

Do các kí hiệu ẩn x, y, z, t không đóng vai trò quan trọng, nên ta có thể viết lại hệ phương trình trên theo dạng ma trận mở rộng như sau:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{array}\right]$$

Tương tự như vậy với hệ phương trình tuyến tính bất kì, ta có thể biểu diễn dưới dạng ma trận mở rộng. Câu hỏi được đặt ra là liệu chúng ta có thể sử dụng các tính chất của ma trận để xét nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tương ứng được hay không. Định lý Kronecker-Capelli sẽ cho chúng ta đáp án cho câu hỏi này.

Định lý Kronecker-Capelli. Cho hệ phương trình $Ax = b$, trong đó A là một ma trận (thực) cấp $m \times n$ và b là một ma trận cột có m dòng, còn x là ma trận ẩn cấp $n \times 1$. Lúc đó ta có:

1. Hệ phương trình vô nghiệm nếu $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A|b)$.
2. Hệ có nghiệm duy nhất nếu $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = n$, ở đây n là số cột của ma trận A, đồng thời cũng là số ẩn xuất hiện trong hệ phương trình trên.
3. Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - \operatorname{rank}(A)$ tham số nếu $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) < n$.

1.6.1 Hệ Cramer và phương pháp giải

Hệ phương trình $Ax = b$, trong đó A là một ma trận vuông khả nghịch được gọi là một *hệ Cramer*. Định lý Cramer khẳng định rằng lúc này hệ có nghiệm duy nhất, xác định bởi

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix},$$

trong đó $D = \det A \neq 0$ và D_i là định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột thứ i bởi b.

1.6.2 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và đặc trưng của nghiệm của hệ này

Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, trong đó b là ma trận 0, được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm là $x = 0$. Theo định lý Kronecker-Cappelli, hệ này có nghiệm duy nhất $x = 0$ khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = n$, trong đó n là số cột của A (cũng chính là số ẩn của hệ phương trình trên). Cũng theo định lý Kronecker-Capelli, nếu $\operatorname{rank}(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số. Giả sử $n - r$ tham số trên là $a_1, \dots, a_{n-r}$. Lúc đó với mỗi i bằng cách gắn cho a_i giá trị 1 và các $a_j, j \neq i$ giá trị 0, ta được $n - r$ nghiệm $x_1, \dots, x_{n-r}$. Lúc đó ta dễ dàng thấy tập nghiệm của hệ phương trình thuần nhất trên là tập

$$\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-r}x_{n-r} : \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}\}.$$

Hệ nghiệm $x_1, \dots, x_{n-r}$ như trên được gọi là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đã cho.
Giả sử ta có một hệ phương trình tổng quát $Ax = b$ và ta biết một nghiệm riêng x_0 của hệ này. Lúc đó, tất cả các nghiệm của hệ này sẽ là $x_0 + x_{tn}$, trong đó x_{tn} là nghiệm của hệ thuần nhât $Ax = 0$.

1.7 Một số mô hình tuyến tính trong kinh tế

Mô hình hóa các vấn đề trong kinh tế về mô hình toán là việc làm thường xuyên của các nhà kinh tế. Sau khi chuyển đổi một vấn đề phát biểu dưới quan điểm kinh tế về một bài toán, các nhà kinh tế/nhà toán học sẽ dựa trên các công cụ của toán học để giải quyết vấn đề, rút ra kết luận, phân tích đánh giá và trả kết quả về dưới dạng các phát biểu của kinh tế. Dựa trên các kết quả đó, người làm kinh tế sẽ tìm được câu trả lời cho vấn đề của mình. Sau đây, chúng ta tìm hiểu một số mô hình rất điển hình trong kinh tế.

1.7.1 Mô hình cân bằng thị trường (mô hình cung cầu)

Nói một cách nôm na, cân bằng thị trường đối với một loại hàng hóa là trạng thái mà tại đó giá của hàng hoá được chấp nhận từ cả người bán và người mua.

Ví dụ 1.7.1. Tại một quầy thịt, giá 1kg thịt rút sườn vào buổi sáng là 95.000 đồng. Quầy thịt vẫn có người mua như các ngày trong tháng. Như vậy, mức giá 95.000 đồng/kg là giá cân bằng đối với mặt hàng này. Tuy nhiên, vào thời điểm gần tết, nhu cầu về thịt tăng mạnh, lượng thịt cung cấp dù tăng nhưng vẫn không đáp ứng được nhu cầu mua dẫn đến giá thịt tăng cao. Khi giá tăng cao, người dân lại có xu hướng giảm lượng mua. Từ đó, giá sẽ giảm xuống dần đến mức cân bằng.

Từ ví dụ trên, ta thấy rằng giá được thị trường chấp nhận chính là giá thỏa mãn nhu cầu người mua và khả năng cung cấp của người bán. Sau đây, ta xem khả năng cung cấp và nhu cầu mua là hai hàm theo biến giá và kí kiệu chúng lần lượt bởi Q_s và Q_d. Ta thấy rằng:

- Khi giá tăng, người bán sẽ muốn bán nhiều, nên hàm $Q_s(p)$ là một hàm tăng theo giá p.
- Khi giá tăng, người mua sẽ giảm hoạt động mua, nên hàm cầu $Q_d(p)$ là một hàm giảm theo giá p.
- Khi giao dịch mua bán được thực hiện tức là người mua chấp nhận giá của người bán thì giá đó được gọi là giá tại điểm cân bằng. Như vậy giá tại điểm cân bằng là mức giá p làm cho hàm cung và hàm cầu bằng nhau: $Q_s(p) = Q_d(p)$.

Trong trường hợp các hàm cung, cầu là các hàm tuyến tính thì ta có $Q_s(p) = -a_0 + a_1p$ và $Q_d(p) = b_0 - b_1p$ với a_0, a_1, b_0, b_1 dương.
Và lúc này mô hình cân bằng có dạng:

$$\begin{cases} Q_s(p) = -a_0 + a_1p \\ Q_d(p) = b_0 - b_1p \\ Q_s(p) = Q_d(p). \end{cases}$$

Ví dụ 1.7.2. Cho hàm cung và hàm cầu theo giá của một loại hàng hóa là $Q_s = -5 + p$ và $Q_d = 55 - 3p$.

- Giá cân bằng thị trường là nghiệm của phương trình:

$$Q_s = Q_d \Leftrightarrow -5 + p = 55 - 3p \Leftrightarrow p = 15.$$

  Vậy giá cân bằng là $\overline{p} = 15$ (đơn vị tiền tệ).

- Khi thị trường đạt cân bằng về giá thì lượng cung bằng lượng cầu và bằng với

$$\overline{Q_s} = \overline{Q_d} = Q_s(15) = Q_d(15) = -5 + 15 = 10 \qquad \text{đơn vị hàng hóa.}$$

Trong thị trường, có rất nhiều loại hàng hóa khác nhau, giá của loại hàng hóa này sẽ ảnh hưởng đến lượng cung và lượng cầu của loại hàng hóa kia. Ví dụ như khi thịt heo tăng giá mạnh, người dân có xu hướng giảm mua thịt heo mà thay vào đó người ta sẽ mua các sản phẩm thay thế như cá biển, cá đồng,v.v. Việc chuyển hướng mua này cho thấy sự thay đổi về nhu cầu và ảnh hưởng đến khả năng cung ứng. Từ đó, ảnh hưởng đến giá thành của thịt và của cả các loại hải sản. Trong trường hợp này, ta xét mô hình cân bằng thị trường tổng quát:

$$\begin{cases} Q_s(p) = a_{i0} + a_{i1}p + a_{i2}p + \cdots + a_{in}p, & i = 1, 2, \ldots, n. \\ Q_d(p) = b_{i0} + b_{i1}p + b_{i2}p + \cdots + b_{in}p, & i = 1, 2, \ldots, n. \\ Q_{si}(p) = Q_{di}(p) & \end{cases}$$

Trong đó,

- biến giá p_i là giá hàng hóa thứ i;
- hàm cung Q_{si} là lượng cung của hàng hóa thứ i;
- hàm cầu Q_{di} là hàm cầu đối với hàng hóa thứ i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Chuyển vế và đặt $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, ta được hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + c_{13}p_3 + \cdots + c_{1n}p_n = -c_{10} \\ c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + c_{23}p_3 + \cdots + c_{2n}p_n = -c_{20} \\ \cdots \\ c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + c_{n3}p_3 + \cdots + c_{nn}p_n = -c_{n0} \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được giá cân bằng cho n loại hàng hóa đã cho.
Ví dụ: Xét một thị trường gồm 3 loại hàng hóa. Hàm cung và hàm cầu thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{array}{lll} Q_{s1} = -2 + 4p_1 - p_2 - p_3, & Q_{s2} = -1 + p_1 + 4p_2 - p_3, & Q_{s3} = -2 - p_1 + p_2 + 4p_3, \\ Q_{d1} = 10 - 2p_1 + p_2 + p_3, & Q_{d2} = 1 + p_1 - 2p_2 + p_3, & Q_{d3} = 3 + p_1 + 2p_2 - 2p_3. \end{array}$$

Hệ phương trình xác định điểm cân bằng là

$$\begin{cases} Q_{s1} = Q_{d1} \\ Q_{s2} = Q_{d2} \\ Q_{s3} = Q_{d3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 4p_1 - p_2 - p_3 = 10 - 2p_1 + p_2 + p_3 \\ -1 + p_1 + 4p_2 - p_3 = 1 + p_1 - 2p_2 + p_3 \\ -2 - p_1 + p_2 + 4p_3 = 3 + p_1 + 2p_2 - 2p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 3 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = 2. \end{cases}$$

Vậy, giá cân bằng mỗi loại là $p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 2$. Ta cũng gọi bộ $(3, 1, 2)$ là điểm cân bằng của thị trường. Ta tính được lượng hàng cân bằng của từng loại như sau:

$$Q_{s1} = Q_{d1} = 7, \qquad Q_{s2} = Q_{d2} = 4, \qquad Q_{s3} = Q_{d3} = 4.$$

1.7.2 Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô

Trong một nền kinh tế đóng, nghĩa là không có quan hệ kinh tế đối ngoại, ta có mô hình cân bằng như sau:

$$Y = C + I + G.$$

- Với Y (Income) là tổng thu nhập quốc dân, C (Consumption) là tổng tiêu dùng của dân cư, I (Invesment), G (Government)là mức chi tiêu chính phủ.
- Hàm tiêu dùng phụ thuộc vào thu nhập, được biểu thị dưới dạng tuyến tính: $C = aY + b$.
- Khoảng đầu tư không ngắn hạn của chính phủ có thể được cố định, tức $I = I_0$.
- Khoản tài khóa (mức tiêu dùng chính phủ) cũng được cố định $G = G_0$.
- Thuế được tính từ thu nhập theo dạng hàm: $T = d + tY$.

Từ đây, ta được mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = a(Y - T) + b \\ T = d + tY \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được mức thu nhập quốc dân Y, mức tiêu dùng C và mức thuế cân bằng T.
Câu hỏi Các hệ số a, b, d, t thuộc miền nào trên trục số và vì sao? **Ví dụ.** Giả sử trong một quốc gia trong năm nay, mức đầu tư cố định của chính phủ là $I_0 = 2500$ (triệu USD), mức chi tiêu cố định của chính phủ là $G_0 = 500$ (triệu USD); còn tổng thu nhập quốc dân Y, tổng mức tiêu dùng dân cư C và tổng thuế T thỏa mãn các điều kiện sau:

$$C = 800 + 0.3(Y - T), \qquad T = 500 + 0.1T.$$

Theo mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô ta có $Y = C + I_0 + G_0$. Thay các giá trị đã cho của I_0, G_0 vào hệ phương trình cân bằng ta được:

$$\begin{cases} Y = C + 2500 + 500 \\ C = 800 + 0.3(Y - T) \\ T = 500 + 0.1Y \end{cases}$$

Biến đổi và giải hệ ta được:

$$\begin{cases} Y - C = 3000 \\ 0.3Y - C - 0.3T = 800 \\ 0.1Y - T = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5000, \\ C = 2000, \\ T = 1000. \end{cases}$$

Vậy tổng thu nhập, chi tiêu và thuế ở mức cân bằng lần lượt là:

$$Y = 5000, \qquad C = 2000, \qquad T = 1000.$$

1.7.3 Mô hình IS-LM

Trong mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô, ta giả thiết là tổng đầu tư không đổi $I = I_0$ tức lãi suất bằng 0. Tuy nhiên, theo một quy luật tự nhiên thì lãi suất không thể bằng 0, khi lãi suất càng cao thì đầu tư càng giảm. Điều này cho thấy rằng hàm đầu tư là một hàm biến động ngược so với lãi suất. Ta giả sử hàm đầu tư có dạng:

$$I = b_1 - a_1 r, \qquad (a_1, b_1 > 0).$$

Từ đây ta được phương trình cân bằng hàng hóa

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = ay + b, I = b_1 - a_1 r, G = G_0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = aY + b + (b_1 - a_1 r) + G_0.$$

Hay $a_1 r = b + b1 + G_0 - (1-a)Y$. Phương trình này được gọi là Phương trình (IS), biểu thị quan hệ giữa lãi suất và thu nhập khi thị trường hàng hóa cân bằng (tổng cung bằng tổng cầu).
Trong thị trường tiền tệ, nhu cầu tiền mặt đồng biến với tổng thu nhập Y và nghịch biến với lãi suất r. Giả sử hàm cầu có dạng tuyến tính:

$$L = b_2 Y - a_2 r, \qquad (a_2 > 0, b_2 > 0)$$

Giả sử lượng cung tiền mặt là M_0. Trong điều kiện thị trường cân bằng tiền tệ ta có:

$$M_0 = L \Leftrightarrow M_0 = b_2 Y - a_2 r \Leftrightarrow a_2 r = b_2 Y - M_0 \qquad \text{(LM)}.$$

Phương trình này cho thấy khi thu nhập tăng thì lãi suất cũng tăng.
Như vậy, ta được hệ phương trình IS-LM được xếp thứ tự trong hệ như sau:

$$\begin{cases} a_1 r = b + b1 + G_0 - (1-a)Y & \text{(IS)} \\ ar = b_2 Y - M_0 & \text{(LM)}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.7.3. Giả sử tại một quốc gia trong năm nay mức chi tiêu cố định của chính phủ là $G_0 = 500$(triệu USD); lượng cung tiền mặt là $M_0 = 1000$ (triệu USD) còn tổng thu nhập quốc dân Y, tổng mức đầu tư chính phủ I, tổng mức tiêu dùng dân cư C, lượng cầu tiền mặt và mức lãi suất r thỏa mãn các điều kiện:

$$I = 2500 - 50r, \qquad C = 500 + 0.4Y, \qquad L = 0.6Y - 200r.$$

Theo mô hình *IS-LM*, ta có

$$Y = C + I + G_0 \Leftrightarrow Y = (500 + 0.4Y) + (2500 - 50r) + 500 \Leftrightarrow 50r = 350 - 0.6Y.$$

Vậy phương trình (IS) là: $50r = 350 - 0.6Y$.
Lượng cung cầu tiền tệ cân bằng tức là:

$$L = M_0 \Leftrightarrow\ 0.6Y - 200r = 1000 \Leftrightarrow 200r = 0.6Y - 1000.$$

Vậy phương trình (LM): $200r = 0.6Y - 1000$.
Mức thu nhập Y là lãi suất r ở trạng thái cân bằng thị trường là nghiệm của hệ hương trình:

$$\begin{cases} (IS) & 50r = 350 - 0.6Y \\ (LM) & 200r = 0.6Y - 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5000 \\ r = 10 \end{cases}$$

Vậy thu nhập cân bằng và lãi suất cân bằng là $Y = 5000$ và $r = 10$.

1.7.4 Mô hình Input-Output của Leontief

Trong mô hình này, khái niệm ngành được xét theo nghĩa thuần túy sản xuất. Các giả thuyết của mô hình:

- Mỗi ngành kinh tế chỉ sản xuất một loại hàng hóa.
- Mỗi ngành đều sử dụng một tỉ lệ cố định các sản phẩm của ngành khác làm đầu vào cho sản suất đầu ra của mình.

- Khi đầu vào thay đổi k lần thì đầu ra cũng thay đổi k lần.

Giả sử một nền kinh tế gồm n ngành sản xuất, ngành $1, 2, 3, \dots, n$.

- Gọi x_i là giá trị tổng cầu[1] về sản phẩm của ngành $i, i = 1, 2, \dots, n$.
- Nhu cầu các hộ tiêu dùng và các nhà xuất khẩu gọi là giá trị cầu cuối cùng, đặt là $b_i, i = 1, 2, \dots, n$.
- Ngành j cần mua sản phẩm ngành i để làm nguyên liệu đầu vào sản xuất, ta kí hiệu là x_{ij}.

Khi đó, tổng cầu ngành i được xác định bởi cầu ngành i của các ngành j và cầu cuối b_i hay

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \cdot + x_{ik} + b_i.$$

Công thức tỉ lệ chi phí đầu vào của ngành j đối với sản phẩm i là $a_{ij} = \dfrac{x_{ik}}{x_i}, 0 < a_{ik} < 1$.
Công thức này được giả định là không thay đổi trong suốt quá trình sản xuất.
Ý nghĩa a_{ij}: Để ngành j sản xuất ra 1 đơn vị giá trị sản phẩm thì cần mua a_ij đơn vị giá trị nguyên liệu đầu vào-sản phẩm, của ngành i.
Giả sử $a_{12} = 0.2$, có nghĩa là để sản xuất ra 1 đồng giá trị ngành 2 cần mua 0.2 đồng nguyên liệu đầu vào sản phẩm của ngành 1, làm nguyên liệu cho quá trình sản xuất.
Nếu đặt

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ở đây, hàng biểu diễn cho dữ liệu đầu vào và cột biểu diễn cho dữ liệu đầu ra.
Ma trận tổng cầu:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vectơ cầu cuối (nhu cầu của người dân và nhu cầu xuất khẩu):

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Từ phương trình (1) ta thay $x_{ij} = a_{ij}x_k$, ta được

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Hay biểu diễn phương trình dưới dạng ma trận là $X = AX + b$. Tức là:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ví dụ: Giả sử một quốc gia có 3 ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào là

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

[1] Tham khảo thêm tại `https://vi.wikipedia.org/wiki/Nguyên_lý_cung_-_cầu`

a) Giải thích ý nghĩa hệ số 0.4 ở dòng 2, cột 3 của ma trận đầu vào.

b) Tìm hệ số tỉ phần gia tăng a_{0j} của từng ngành ($j = 1, 2, 3$). Giải thích ý nghĩa của hệ số a_{03}.

c) Tìm đầu ra cho mỗi ngành biết rằng cầu cuối của mỗi ngành lần lượt là 85, 40, 5.

d) Tìm cầu cuối của mỗi ngành biết đầu ra của mỗi ngành lần lượt là 40, 40, 30.

Bài Giải.

a) Hệ số a_{23} ở dòng 2 cột 3 có nghĩa là để sản xuất 1 USD giá trị hàng hóa của ngành 3 cần chi ra 0.4 USD mua hàng háo của ngành 2.

b) Hệ số tỉ phần gia tăng a_{0j} của từng ngành ($j = 1, 2, 3$)

✓ $a_{01} = 1 - (0.3 + 0.2 + 0.2) = 0.3$

✓ $a_{02} = 1 - (0.2 + 0.3 + 0.3) = 0.2$

✓ $a_{03} = 1 - (0.1 + 0.4 + 0.3) = 0.2$

Ý nghĩa của $a_{02} = 0.2$: tỉ phần gia tăng trong tổng giá trị hàng hóa của ngành 2 là 20%. Nói cách khác, trong sản xuất của mình, ngành 2 đã tạo ra 20% giá trị gia tăng sau khi trừ mọi chi phí.

c) Theo giả thiết ta có cầu cuối $B = (b_1, b_2, b_3)^t = (85, 40, 5)^t$. Do đó, đầu ra $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(I-A)X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 40 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.7x_1 - 0.2x_2 - 0.1x_3 & = 85 \\ -0.2x_1 + 0.7x_2 - 0.4x_3 & = 40 \\ -0.2x_1 - 0.3x_2 + 0.7x_3 & = 5. \end{cases}$$

Với I là ma trận đơn vị cấp 3. Giải hệ ta được đầu ra mỗi ngành lần lượt là

$$x_1 = 200, x_2 = 200, x_3 = 150.$$

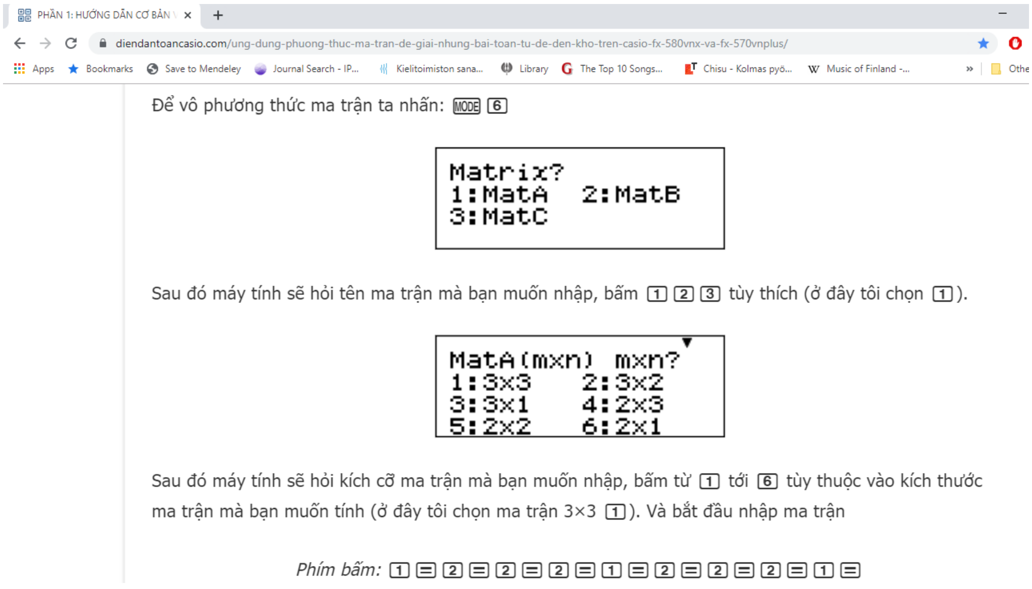
d) Vì đầu ra $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ là $(40, 40, 30)$ nên cầu cuối $B = (b_1, b_2, b_3)^t$ xác định bởi hệ thức.

$$B = (I - A)X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy cầu cuối của mỗi ngành lần lượt là $17, 8, 1$.

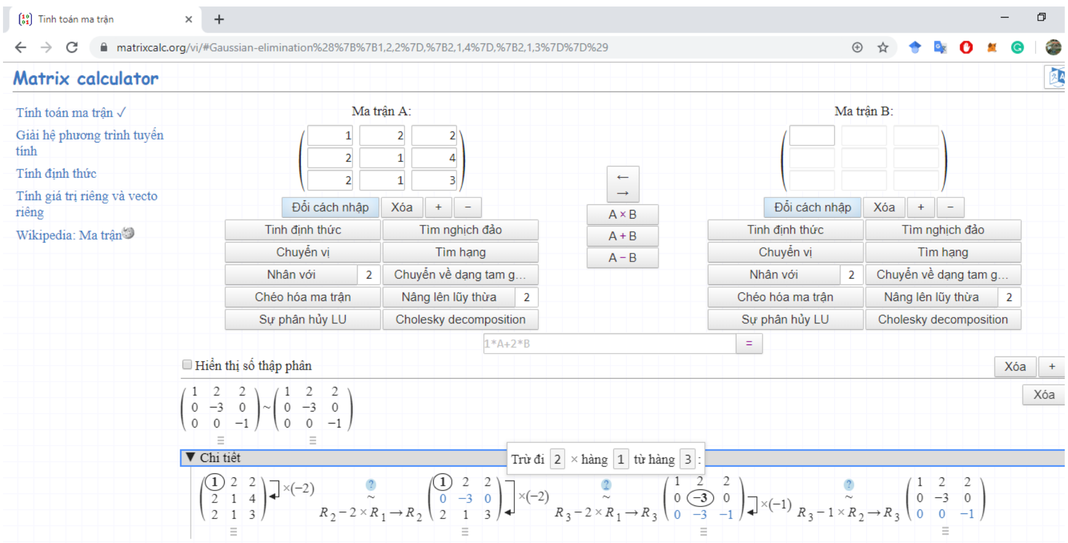
1.8 Hướng dẫn sử dụng máy tính cầm tay và các phần mềm tính toán trên ma trận

Máy tính cầm tay có thể hỗ trợ tốt cho nhiều tính toán với ma trận và hệ phương trình kích cỡ nhỏ[2]



Hình 1.1: Cách nhập và tính toán với ma trận trên máy cầm tay Casio.

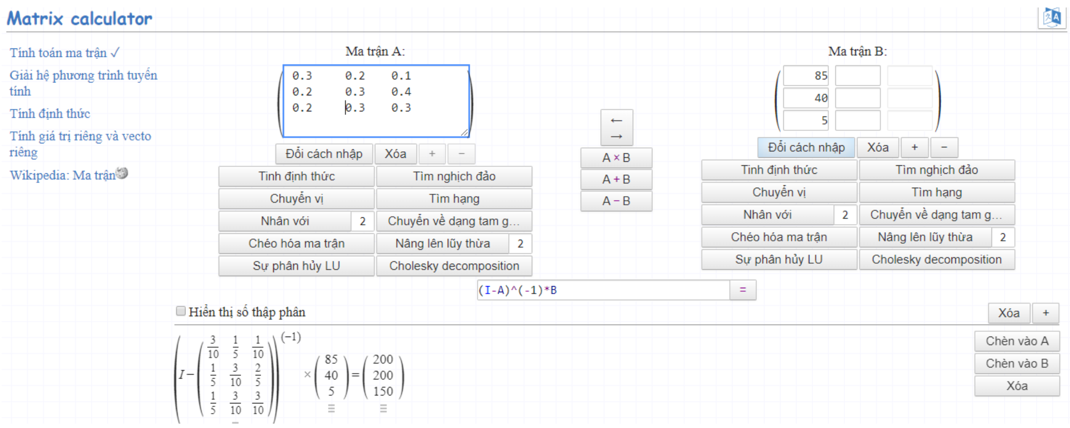
Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng trang web Matrix calculator[3] để thực hiện một số phép toán cơ bản trên ma trận, ví dụ như dưới đây.



Hình 1.2: Biến đổi ma trận về dạng tam giác.

Thực hiện phép toán nghịch đảo và phép nhân hai ma trận, ta viết biểu thức tính vào ô trống ngay giữa hai ma trận như hình bên dưới:

[2]https://diendantoancasio.com/ung-dung-phuong-thuc-ma-tran-\de-giai-nhung-bai-toan-tu-de-den-kho-tren-casio-fx-58
[3]https://matrixcalc.org/vi/



Hình 1.3: Phép toán nghịch đảo và phép nhân.

1.9 Một số bài tập và thực hành cuối chương 1

1. (Bài tập làm việc nhóm). Nhóm hãy tìm hiểu thêm về các ứng dụng của ma trận và hệ phương trình tuyến tính trong thực tiễn. Từ đó nhóm chuẩn bị bài trình bày trước lớp (powerpoint hoặc tương đương), tối thiểu gồm hai ứng dụng cụ thể.

2. (Bài tập rèn luyện tiếng Anh học thuật). Tìm hiểu và trình bày theo ý bạn các nội dung được đề cập trong video sau: The beauty I see in algebra.

3. (Bài tập thực hành). Sử dụng máy tính cầm tay[4], phần mềm Excel[5] (hoặc tương tự), website doza[6] hoặc matrix calculator[7] để tính toán với một số ma trận bạn tự chọn. So sánh kết quả, ưu và nhược điểm (nếu có) của các công cụ nói trên. Đọc thêm về thuật toán giải hệ phương trình tuyến tính trên máy tính, liên hệ với kiến thức vừa học trong chương này.

4. Giả sử trên thị trường hiện có 3 công ty chuỗi cửa hàng đồ ăn nhanh A, B, C đang cạnh tranh nhau. Trong đó công ty A chiếm 20% thị phần, B chiếm 60% và C chiếm 20%. Khảo sát về mức độ trung thành của khách hàng trong năm tới ta thu được số liệu sau:
   A sẽ giữ được 85% khách hàng nhưng 5% nói sẽ chuyển sang B và 10% sẽ chuyển sang C.
   B sẽ giữ được 55% khách hàng nhưng 15% nói sẽ chuyển sang A và 30% sẽ chuyển sang C.
   C sẽ giữ được 85% khách hàng nhưng 10% nói sẽ chuyển sang A và 5% sẽ chuyển sang B.
   Năm tới thị phần của công ty A, B, C sẽ lần lượt là bao nhiêu?

5. Hàm cung của một mặt hàng là $Q_S = 5P - 25$ (P có đơn vị là đô la, Q có đơn vị là sản phẩm). Xác định giá thấp nhất được bán của loại sản phẩm trên? Giải thích vì sao?

6. Xét một thị trường gồm hai loại hàng hóa. Hàm cung, hàm cầu và giá của chúng thỏa mãn các điều kiện sau:
   $Q_{d1} = 150 - 2p_1 + p_2; \quad Q_{s1} = -45 + 2p_1$
   $Q_{d2} = 75 + 2p_1 - 2p_2; \quad Q_{s2} = -30 + 3p_2.$
   Lượng cung cầu cân bằng của từng loại hàng hóa là bao nhiêu? Nhận xét về mối liên hệ giữa hai loại hàng hóa trên (chúng thay thế lẫn nhau giống như xe bus với xe taxi hay được thường tiêu thụ cùng nhau giống như máy tính và máy in)?

[4] https://diendantoancasio.com/ung-dung-phuong-thuc-ma-tran-de-giai-nhung-bai-toan-tu-de-den-kho-tren-casio-fx-580
[5] https://www.youtube.com/watch?v=3jn8fas_MAc&t=98s
[6] doza.pro
[7] https://matrixcalc.org/vi/

7. Ta có mô hình kinh tế vĩ mô với đơn vị là (tỷ đô la) như sau: Chi dùng của chính phủ là G = 180;
phần đầu tư chung là I = 540
và tiêu dùng của quốc gia là C = 0.8Y + 120
(trong đó Y là thu nhập quốc gia).
Tại vị trí cân bằng kinh tế, thu nhập quốc gia Y là bao nhiêu?

8. Nếu hàm cung và cầu của thị trường gồm một loại hàng hóa cho bởi phương trình sau

$$P = aQ_S + b; \quad P = cQ_D + d.$$

Trong đó P (price) là giá hàng hóa và Q (quantity) là số lượng cung hoặc cầu. Ta cần điều kiện gì cho a, b, c, d để phương trình có ý nghĩa về mặt kinh tế và tồn tại điểm cân bằng?

9. Giả sử nền kinh tế có hai ngành nông nghiệp và năng lượng. Mỗi 1 đô la giá trị nông nghiệp cần 0.4 từ chính nó và 0.2 từ năng lượng; phía năng lượng cần 0.2 từ nông nghiệp và 0.1 từ chính nó. Nhu cầu bên ngoài là 12 tỷ đô là từ nông nghiệp và 9 tỷ đô la từ năng lượng. Tìm:
a. Ma trận Input - Output?
b. Tỷ phần gia tăng của ngành nông nghiệp và ngành năng lượng?
c. Tại vị trí cân bằng, nên sản xuất bao nhiêu tỷ đô la nông nghiệp và bao nhiêu tỷ đô la năng lượng?

Chương 2

Không gian $\mathbb{R}^n$ và sơ lược về không gian vectơ

Sau khi học xong chương này, người học có những kỹ năng và kiến thức sau:

1. Hiểu về ý nghĩa của vectơ trong đời sống cũng như trong kinh tế.

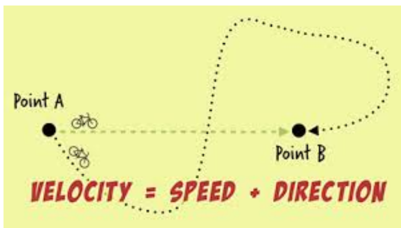
2. Thực hiện được các tính toán trên vectơ.

3. Xét được tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ.

4. Xét được một hệ vectơ có phải là cơ sở của không gian đã chỉ ra hay không và *tính được toạ độ của vectơ theo một cơ sở bất kì.*

5. Sử dụng được máy tính cầm tay cũng như các ứng dụng trên máy vi tính để tính toán với các vectơ.

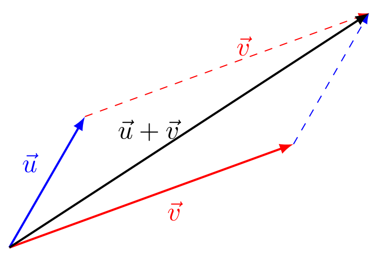
Một vectơ là một đại lượng có độ dài (magnitude) và hướng (direction). Ví dụ như vận tốc là một vectơ trong khi đó tốc độ là một đại lượng vô hướng.



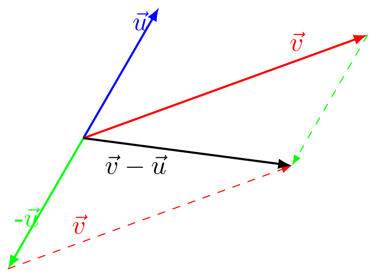
Hai vectơ là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng (không cần phải xuất phát từ cùng một điểm).

2.0.1 Các phép toán trên vectơ

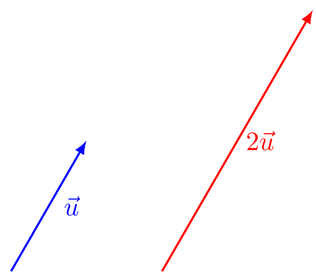
Phép cộng. Để cộng hai vectơ u và v, ta vẽ một vectơ có cùng hướng và độ dài với vectơ v nhưng xuất phát từ đỉnh của vectơ u. Lúc đó, $u+v$ là vectơ xuất phát từ gốc của vectơ u và kết thúc ở đỉnh của vectơ v mới được vẽ lại. Trong hệ trục toạ độ Descartes, tổng của hai vectơ $u=(a_1,\dots,a_n)$ và $v=(b_1,\dots,b_n)$ là vectơ $u+v$ có toạ độ là $u+v=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$.



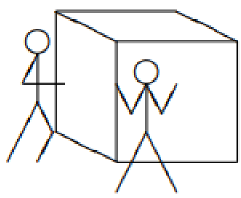
Phép trừ. Vì $v - u = v + (-u)$, nên hiệu $v - u$ bằng với tổng của vectơ v và vectơ $-u$, trong đó vectơ $-u$ là vectơ có cùng phương và độ dài với vectơ u nhưng ngược hướng.

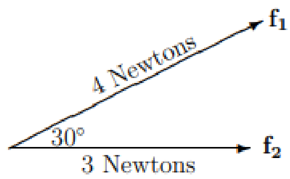


Phép nhân vô hướng. Lấy α là một số thực bất kì, lúc đó vectơ αu là vectơ có cùng phương với vectơ u, nhưng có độ dài bằng $|\alpha|$ lần độ dài của u, đồng thời αu có cùng (ngược) hướng với u nếu $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$).



Bài tập. Hai sinh viên cùng đẩy một vật nặng với lực và góc độ như sau:





Hỏi hướng di chuyển và độ dài dịch chuyển của vật thể như thế nào?

2.1 Tổ hợp tuyến tính - biểu diễn tuyến tính

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho một hệ $m + 1$ vectơ

$$v_1, v_2, \ldots, v_m, \text{ và } v.$$

Lúc đó biểu diễn $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là các số thực, được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Nếu tồn tại một tổ hợp tuyến tính của hệ $v_1, \ldots, v_m$ mà bằng với vectơ v thì ta nói v biểu diễn tuyến tính qua hệ $v_1, \ldots, v_m$. Một tổ hợp tuyến tính được gọi là tầm thường nếu các hệ số $a_1, \ldots, a_m$ đều bằng 0. Sử dụng định lý Kronecker-Capelli đã học ở Chương I, ta dễ dàng chứng minh định lý sau:

Định lý 2.1.1.

- v biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, v_2, \ldots, v_m$ khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|v)$, trong đó A là ma trận tạo thành từ các cột $v_1, \ldots, v_m$.
- v biểu diễn tuyến tính duy nhất được qua $v_1, v_2, \ldots, v_m$ khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|v) = m$.

2.2 Hạng của hệ vectơ

Trong $\mathbb{R}^n$, ta nói hệ m vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ có hạng là r, kí hiệu là $\operatorname{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = r$, nếu tồn tại r vectơ trong hệ sao cho r vectơ độc lập tuyến tính và tất cả các vectơ còn lại trong hệ đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ r vectơ này.
Định lý.

$$\operatorname{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \operatorname{rank}(A),$$

trong đó A là ma trận tạo thành từ các cột $v_1, \ldots, v_m$.

2.3 Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Một hệ m vectơ $v_1, \ldots, v_m$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu vectơ O chỉ có duy nhất một cách biểu diễn tuyến tính qua hệ bởi tổ hợp tuyến tính tầm thường. Ngược lại thì ta nói hệ *phụ thuộc tuyến tính.*
Định lý. Hệ vectơ $v_1, \ldots, v_m$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = m$, trong đó $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$ là ma trận tạo thành từ các vectơ $v_1, \ldots, v_m$ viết theo cột.

2.4 Cơ sở, số chiều và toạ độ

Một hệ vectơ (sắp thứ tự) $v_1, \ldots, v_m$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là một *cơ sở* của $\mathbb{R}^n$ nếu như hệ này độc lập tuyến tính và mọi vectơ trong $\mathbb{R}^n$ đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ trên.
Ví dụ. Hệ $(v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1))$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, vì mọi vectơ u trong $\mathbb{R}^2$ đều có dạng $u = (a, b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Nên $u = av_1 + bv_2$. Vì vậy hệ (v_1, v_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
Định lý. Trong $\mathbb{R}^n$, hệ $v_1, \ldots, v_m$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $m = n$ (tức là số vectơ trong hệ bằng với *"số chiều"* của không gian đã cho và $v_1, v_2, \ldots, v_m$ là một hệ độc lập tuyến tính.
Như vậy, một hệ n vectơ $v_1, \ldots, v_n$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một cơ sở khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$, trong đó $A = [v_1\ v_2\ \ldots v_m]$ là ma trận tạo thành từ các vectơ trong hệ.
Số chiều. Số vectơ của mỗi cơ sở trong không gian vectơ được gọi là *số chiều* của không gian vectơ đó. Ví dụ như số chiều của $\mathbb{R}^n$ là n, và ta kí hiệu là $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
Toạ độ. Trong $\mathbb{R}^n$, cho cơ sở $(B) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Khi đó, mỗi vectơ trong $\mathbb{R}^n$ đều biểu diễn tuyến tính được một cách duy nhất qua (B), tức là cho một vectơ b bất kì, ta luôn tìm được một bộ n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n.$$

Bộ n số thực $(x_1, \ldots, x_n)$ được gọi toạ độ của vectơ x theo cơ sở (B). Ta kí hiệu là

$$[x]_{(B)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2.5 Thực hành với phần mềm

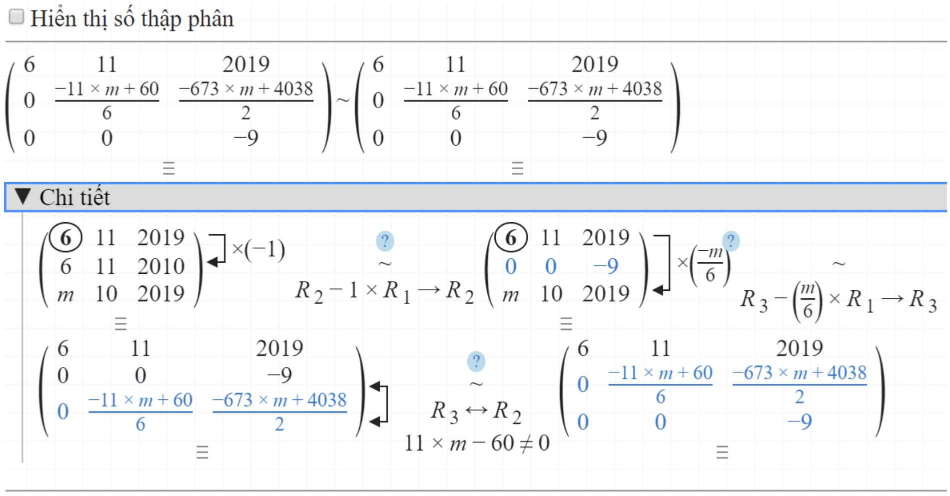
Việc tìm hạng, xét tính độc lập hay phụ thuộc tuyến tính của các véc tơ có thể thông qua phép biến đổi sơ cấp, hoặc/và sử dụng các công cụ online để hỗ trợ kiểm tra [1], xem hình 2.5.

2.6 Một số bài tập và thực hành cuối chương 2

1. (Bài tập nhóm). Nhóm hãy tìm hiểu thêm về các ứng dụng của không gian véc tơ trong thực tiễn, chuẩn bị bài trình bày trước lớp (powerpoint hoặc tương đương), tối thiểu gồm hai ứng dụng cụ thể. Có thể tham khảo sách Fuad Aleskerov et al. "Linear Algebra for Economists"[2]: phần 2.3 trang 27, 2.4 trang 29, 6.5 trang 101.

2. (Bài tập rèn luyện tiếng Anh học thuật). Tìm hiểu và trình bày theo ý bạn các nội dung được đề cập trong video Why is linear algebra useful?.

[1] `https://matrixcalc.org/vi/`
[2] `http://93.174.95.29/_ads/432193591563C6CD1C0060CD4371CA0C`



Hình 2.1: Tìm hạng của một hệ véc tơ bằng cách chuyển ma trận tương ứng với hệ véc tơ về dạng bậc thang.

3. (Bài tập thực hành). Sử dụng máy tính cầm tay, Excel, hoặc các công cụ online doza[3], matrix calculator[4] để tính toán với một số hệ véc tơ (bao gồm hệ chứa tham số) do bạn tự chọn.

4. Cho một công ty gồm 5 nhân viên, hệ số lương của các nhân viên lần lượt là (2.67; 3.33; 6.2; 3.66; 4.98). Biết mức lương cơ bản theo quy định hiện hành là 1 490 000 đồng/tháng, mức phụ cấp cố định của công ty là 25% và phụ cấp ăn trưa là 700 000 đồng/tháng. Sử dụng phép toán trên véc tơ tính lương tháng của 5 nhân viên nói trên?

[3] `doza.pro`
[4] `https://matrixcalc.org/vi/`

Chương 3

Sơ lược về toán tử tuyến tính và dạng toàn phương

Sau khi học xong chương này, người học đạt được những kiến thức và kỹ năng sau:

- Hiểu được tầm quan trọng của giá trị riêng, vectơ riêng trong khoa học và trong thực tiễn.
- Tính được giá trị riêng, vectơ riêng, xét được tính chéo hoá cũng như chéo hoá được ma trận vuông cấp nhỏ.
- Hiểu về dạng toàn phương: đưa được dạng toàn phương về dạng chính tắc, xét dấu được dạng toàn phương.
- Sử dụng được các phần mềm để hỗ trợ tính toán phức tạp.

Theo một cuộc điều tra lao động nam tại Mỹ năm 1996, tỷ lệ có việc làm là $x_0 = 0.95$ và tỷ lệ thất nghiệp $y_0 = 0.05$. Sau mỗi tuần, ở nhóm có việc, xác suất bị mất việc là 0.002. Ở nhóm thất nghiệp, xác suất có việc ở tuần sau đó là 0.136. Sau 100 tuần, tỷ lệ có việc và thất nghiệp sẽ là:

$$\begin{bmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.998 & 0.136 \\ 0.002 & 0.864 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

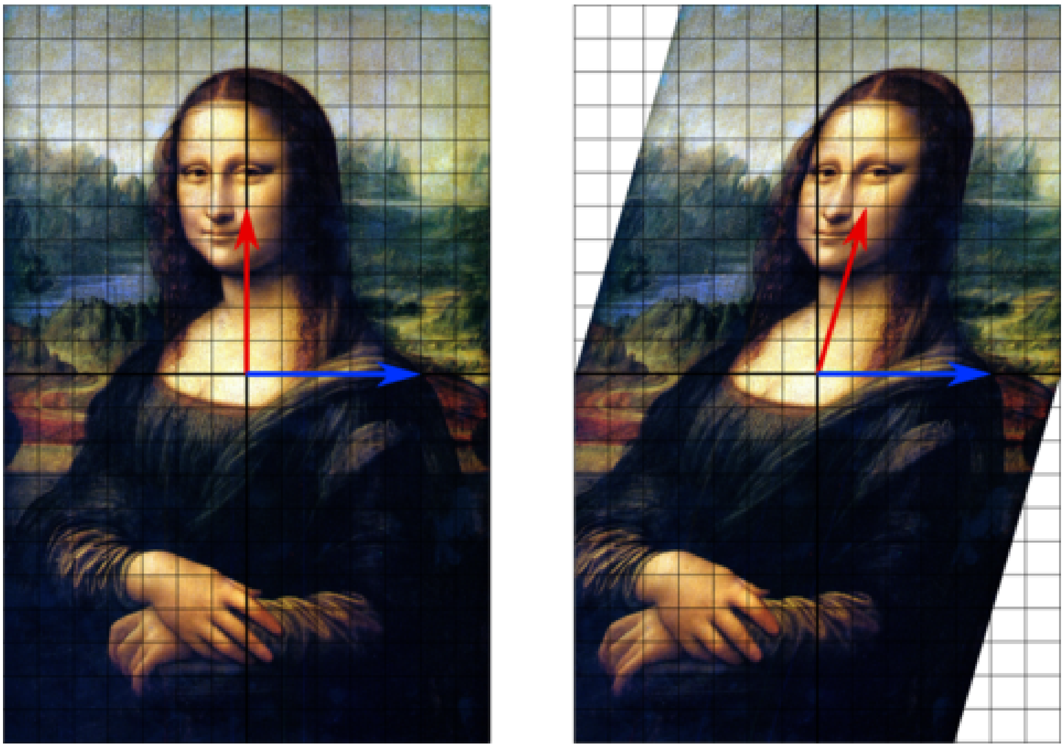
Ma trận chuyển trạng thái ở trên là một ví dụ về toán tử tuyến tính. Việc tính toán giá trị (x_100, y_100) có thể khá lâu nếu ta không có máy tính hỗ trợ. Trong chương này chúng ta sẽ bàn về toán tử tuyến tính và một số các khái niệm liên quan. Làm việc với chúng sẽ trở nên bớt phức tạp và thú vị hơn nhiều.

3.1 Giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận

Phép chuyển hình trong hình 3.1 là một toán tử tuyến tính. Bằng cách chọn cơ sở phù hợp, toán tử tuyến tính trên tương đương với một ma trận. Vectơ màu xanh có một đặc điểm là nó không thay đổi về phương sau toán tử tuyến tính bên trên. Và nó được gọi là một vectơ riêng của toán tử tuyến tính đó, hay ma trận của toán tử tuyến tính đó. Như vậy, nói một cách nôm na, một vectơ v là một vectơ riêng của một ma trận vuông A nếu Av có cùng phương với v, nghĩa là $Av = \lambda v$ với λ là một số thực. Số thực λ như thế được gọi là một giá trị riêng của A ứng với vectơ riêng v. Nếu cho trước một giá trị riêng λ, thì một vectơ $v \neq 0$ thoả mãn $Av = \lambda v$ cũng được gọi là một vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.
Định nghĩa. Cho một ma trận vuông A, một số thực λ được gọi là một giá trị riêng của A nếu tồn tại một vectơ $v \neq 0$ sao cho

$$Av = \lambda v.$$

Vectơ v như trên được gọi là một vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.



Hình 3.1: *"Ánh xạ"* chuyển từ hình bên trái sang hình bên phải ở bên trên là một toán tử tuyến tính từ không gian 2 chiều sang không gian 2 chiều.

3.1.1 Cách tìm giá trị riêng và vectơ riêng

Cho một ma trận vuông A, λ là một giá trị riêng của A khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \exists v \neq 0 : Av = \lambda v \\ \iff & \exists v \neq 0 : (A - \lambda I)v = 0 \\ \iff & \det(A - \lambda v) = 0 \end{aligned}$$

Vậy tập các giá trị riêng của ma trận A là tập tất cả nghiệm của đa thức (theo λ) $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$.

Cho một ma trận vuông A cùng với một giá trị riêng λ, thì $v \neq 0$ là một vectơ riêng của A ứng với λ khi và chỉ khi v là nghiệm của

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Như vậy, việc tìm giá trị riêng của ma trận được quy về việc giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ và việc tìm vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ được quy về việc giải hệ phương trình tuyến tính $(A - \lambda I)v = 0$.

3.1.2 Chéo hoá ma trận

Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -21 & 10 \end{bmatrix}.$$

Thì A có

$$\begin{aligned} &\text{GTR: } \lambda_1 = 3, \quad \text{VTR: } u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &\text{GTR: } \lambda_1 = 4, \quad \text{VTR: } v = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\left.\begin{aligned} A\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} &= 3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\\ A\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} &= 4\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow A\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.1 & 4.2\\3.3 & 4.7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$$

Đặt

$$P = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{bmatrix}.$$

Thì ta có

$$AP = P\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}.$$

Hay

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}.$$

Quá trình như trên được gọi là quá trình chéo hoá ma trận A.

Cho một ma trận A vuông bất kì, ta nói A chéo hoá được nếu tồn tại một ma trận khả nghịch cùng cấp P, sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo. Lúc đó ma trận P được gọi là *ma trận làm chéo hoá* A, còn ma trận chéo $D = P^{-1}AP$ được gọi là *dạng chéo* của A.

Giả sử $P^{-1}AP = D$ là một ma trận chéo. Thì ta dễ dàng suy ra

$$\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(D - \lambda I).$$

Nên nếu A chéo hoá được thì tập giá trị riêng của A chính là tập hợp các phần tử trên đường chéo của D. Hơn nữa, cột thứ i của P chính là một vectơ riêng của P tương ứng với giá trị riêng $(D)_{ii}$. Vì vậy ta có thuật toán chéo hoá ma trận như sau.

Thuật toán chéo hoá ma trận vuông A.

1. Lập đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
2. Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ để tìm các giá trị riêng (thực) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
3. Với mỗi giá trị riêng λ, giải hệ phương trình (theo v) $(A - \lambda I)v = 0$. Đếm số tham số xuất hiện trong mỗi hệ nghiệm (cũng chính là số chiều của không gian vectơ riêng tương ứng với mỗi λ).
4. Nếu tổng số tham số xuất hiện ở bước 3 ít hơn số bậc của ma trận A thì ta khẳng định A không chéo hoá được. Trong trường hợp tổng số tham số bằng với số bậc thì ma trận chéo hoá được. Lúc đó ma trận làm chéo hoá A là ma trận tạo thành từ các vectơ cơ bản ở bước 3, và ma trận dạng chéo của A tương ứng là ma trận các vectơ riêng tương ứng.

3.2 Sơ lược về dạng toàn phương

Một *dạng toàn phương* n biến thực định nghĩa bởi:

$$q = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j,$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$, còn $x_1, \ldots, x_n$ là n biến số (thực).

Ví dụ 3.2.1. Đa thức sau đây là một dạng toàn phương 3 biến:

$$q = 2x^2 - 3y^2 - 4xy + 8xz$$

3.2.1 Biểu diễn ma trận của dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương

$$q = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ma trận

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

trong đó $a_{ji} = a_{ij}$, được gọi là *ma trận của dạng toàn phương* q bên trên.
Xét ma trận dòng $x = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)$. Thì ta có

$$q = xAx^t.$$

Ví dụ 3.2.2. Ma trận của dạng toàn phương $q = 2x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xy + 8xz + 3yz$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & \frac{3}{2} \\ 4 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ta dễ dàng thấy nếu A là ma trận của một dạng toàn phương thì $A = A^t$, hay nói cách khác, A là một ma trận *đối xứng.*

3.2.2 Hạng của dạng toàn phương

Hạng của dạng toàn phương q, kí hiệu bởi $\mathrm{rank}(q)$, được định nghĩa là hạng của ma trận biểu diễn của nó.

Ví dụ 3.2.3. Cho dạng toàn phương

$$q = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Thì ta có $\mathrm{rank}(q) = 1$ vì ma trận biểu diễn của q

$$A_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

có hạng là 1.

3.2.3 Dạng chính tắc

Dạng toàn phương q được gọi là dạng chính tắc nếu ma trận biểu diễn của q có dạng chéo. Lúc đó, các hệ số a_{ii} nằm trên đường chéo được gọi là các *hệ số chính tắc* của q.
Định lý (Luật quán tính Sylvester) Mỗi dạng toàn phương q luôn có thể đổi biến để đưa về dạng chính tắc. Nhìn chung thì dạng chính tắc của q là không duy nhất mà phụ thuộc vào cách đổi biến. Trong mỗi dạng chính tắc của q, số các hệ số chính tắc khác 0, số các hệ số dương và số các hệ số âm không phụ thuộc cách đổi biến. Ta gọi số các hệ số dương (âm) của A là chỉ số dương (âm) quán tính của q.

Ví dụ 3.2.4. Nếu dạng toàn phương 3 biến q có dạng chính tắc là

$$q = 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2,$$

thì chỉ số quán tính dương của q là 2, trong khi đó chỉ số âm quán tính của q là 1 và hạng của q là 3.

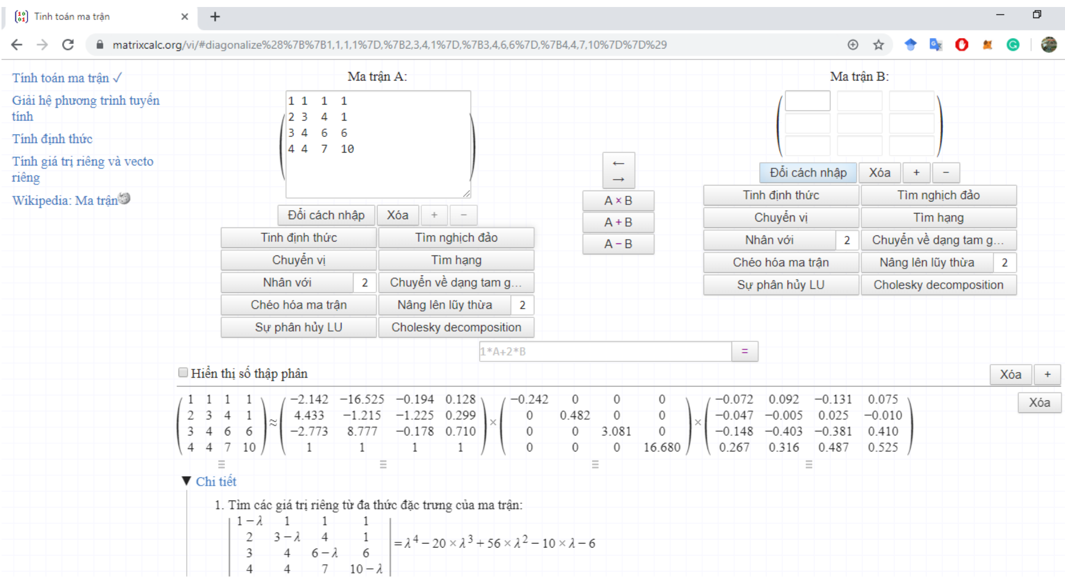
3.2.4 Dấu của dạng toàn phương

Cho một dạng toàn phương q. Khi đó,

1. q được gọi là không âm nếu mọi hệ số chính tắc của q đều dương.
2. q được gọi là xác định dương nếu q không âm và số các hệ số chính tắc đúng bằng số biến của q.
3. q được gọi là không dương nếu mọi hệ số chính tắc của q đều âm.
4. q được gọi là xác định âm nếu q không dương và số các hệ số chính tắc đúng bằng số biến của q.
5. Nếu hệ số chính tắc của q có cả âm và dương thì ta nói q đổi dấu.

3.3 Thực hành phần mềm

Việc tìm hoặc kiểm tra kết quả về giá trị riêng, véc tơ riêng và chéo hóa ma trận, kể cả những ma trận có tham số sẽ đơn giản hơn thông qua phần mềm online. Các bước tính toán được giải thích chi tiết, xem thêm hình 3.2.



Hình 3.2: Tính nghiệm của phương trình đặc trưng và chéo hóa ma trận 4×4.

3.4 Một số bài tập và thực hành cuối chương 3

1. (Bài tập nhóm). Nhóm hãy tìm hiểu thêm về các ứng dụng của giá trị riêng và vector riêng trong thực tế, chuẩn bị bài trình bày trước lớp (powerpoint hoặc tương đương). Có thể tham khảo sách Fuad Aleskerov et al. "Linear Algebra for Economists"[1] phần 9.1 trang 149 hoặc website thetalog.com[2].
2. (Bài tập rèn luyện tiếng Anh học thuật). Tìm hiểu và trình bày tóm tắt các nội dung được nêu trong trang wikipedia về giá trị riêng và véc tơ riêng[3].
3. (Bài tập thực hành). Sử dụng phần mềm online doza[4] hoặc matrix calculator[5] để tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của một ma trận (ánh xạ tuyến tính) do bạn tự chọn.

[1] http://93.174.95.29/_ads/432193591563C6CD1C0060CD4371CA0C
[2] https://thetalog.com/thetaflow/pca2d-visualizer/?fbclid=IwAR0k5vk7h2ZUFybrLYeGz9v9NVz-\
jLTGjnK0mWvnBomrGl7qInmrJjDuubo
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors
[4] doza.pro
[5] https://matrixcalc.org/vi/

4. Dùng giá trị riêng, véc tơ riêng và chéo hóa ma trận để xử lý tình huống nêu ra ở đầu chương này: tính tỷ lệ có việc làm và tỷ lệ thất nghiệp sau 100 tuần với số liệu của Mỹ:

$$\begin{bmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.998 & 0.136 \\ 0.002 & 0.864 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

Chương 4

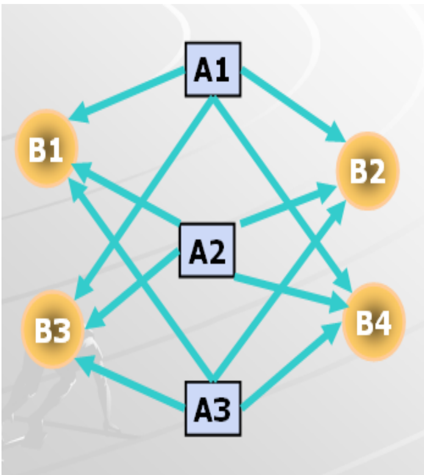
Quy hoạch tuyến tính

Sau khi học xong chương này, người học đạt được những kiến thức và kỹ năng sau:

1. Hiểu được bài toán quy hoạch tuyến tính.
2. Hiểu được ý nghĩa của bài toán quy hoạch tuyến tính trong kinh tế cũng như trong đời sống.
3. Hiểu được định nghĩa của các phương án và ý tưởng của phương pháp đơn hình.
4. Sử dụng được các phần mềm trên máy vi tính để xử lý bài toán quy hoạch tuyến tính.

4.1 Bài toán vận tải

Một bài toán vận tải (transportation problem) là một bài toán tìm phương án vận chuyển giữa các "kho hàng" và "cửa hàng" sao cho có lợi nhất. Ví dụ, ta có 3 kho hàng A_i và 4 cửa hàng B_i như sau:



Trong đó,

1. Kho hàng A_i có a_i tấn hàng.
2. Cửa hàng B_i cần b_i tấn hàng.
3. Chi phí vận chuyển từ A_i sang B_j là c_{ij} (nghìn USD) trên mỗi tấn hàng.

Câu hỏi được đặt ra là tìm phương án vận chuyển tiết kiệm nhất?
Đặt x_{ij} là số tấn hàng chuyển từ A_i tới B_j.Ta sẽ gọi ma trận (x_{ij}) là một phương án vận chuyển. Như vậy, bài toán vận tải là bài toán tìm phương án vận chuyển x_{ij} sao cho chi phí vận chuyển là ít nhất

Mỗi phương án vận chuyển x_{ij} sẽ tốn của chúng ta chi phí là:

$$G = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}.$$

Để đơn giản, ta xét một trường hợp cụ thể như sau:

	B1: 50	B2: 150	B3:150	B4:100
A1:150	3 X_{11}	5 X_{12}	6 X_{13}	2 X_{14}
A2:250	3 X_{21}	1 X_{22}	3 X_{23}	4 X_{24}
A3:50	4 X_{31}	5 X_{32}	7 X_{33}	2 X_{34}

Nghĩa là kho hàng A_1 có $a_1 = 150$ tấn hàng, kho hàng A_2 có $a_2 = 250$ tấn hàng, kho hàng A_3 có $a_3 = 50$ tấn hàng; và cửa hàng B_1 cần 50 tấn hàng, cửa hàng B_2 cần 150 tấn hàng, cửa hàng B_3 cần 150 tấn hàng, cửa hàng B_4 cần 100 tấn hàng. Ngoài ra, chi phí để vận chuyển mỗi tấn hàng từ kho A_i đến kho B_j là

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Do kho hàng A_i chỉ có a_i tấn hàng và cửa hàng B_j chỉ cần b_j tấn hàng. Nên ta có các ràng buộc (lý tưởng) như sau:

$$(I) \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 250 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} & = 50 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 150 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 150 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = 100 \end{cases}$$

Như vậy, bài toán trở thành tìm phương án (x_{ij}) thoả mãn các ràng buộc (I) phía trên sao cho hàm chi phí

$$G = 3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 2x_{34}$$

đạt giá trị **thấp nhất.**
Vì cả hàm mục tiêu G và các ràng buộc đều là các hàm tuyến tính nên bài toán vận tải là một bài toán quy hoạch tuyến tính. Như vậy một bài toán quy hoạch tuyến tính là một bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một hàm mục tiêu với một hệ các ràng buộc (là các phương trình hoặc bất phương trình), trong đó cả hàm mục tiêu lẫn các ràng buộc phải là các hàm tuyến tính.

4.2 Phương án và phương án tối ưu

Giả sử ta có một bài toán quy hoạch tuyến tính như sau: tìm x_{ij} sao cho hàm mục tiêu

$$G = 3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 2x_{34}$$

đạt giá trị nhỏ nhất, với các ràng buộc:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = 150 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 250 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = 50 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} & = 50 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 150 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 150 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} & = 100
\end{cases}
$$

Khi đó, một **phương án (PA)** là một ma trận (x_{ij}) trong $\mathbb{R}^n$ sao cho nó thoả mãn tất cả các ràng buộc.

Ví dụ 4.2.1. Một trường hợp tối ưu.
Ma trận

$$
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 150 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

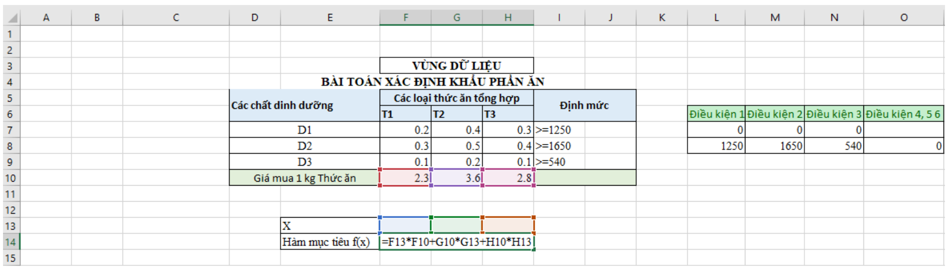
là một phương án. Một phương án được gọi là **phương án tối ưu (PATƯ)** nếu nó làm cho hàm mục tiêu đạt được cực trị (trong trường hợp này là cực tiểu).

4.3 Giới thiệu ý tưởng của phương pháp đơn hình

Để giải một bài toán quy hoạch tuyến tính, ta có thể sử dụng *phương pháp đơn hình*. Phương pháp đơn hình là phương pháp mà ta xuất phát từ một phương án (cực biên), sau đó ta sẽ dựa vào các hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc để tìm một phương án tốt hơn, nghĩa là phương án mới này làm cho hàm mục tiêu đạt gần giá trị tối ưu hơn. Trong trường hợp của bài toán vận tải bên trên, phương án mới sẽ làm cho chi phí nhỏ hơn. Sau đó, ta kiểm tra xem phương án mới này đã là phương án tối ưu chưa. Nếu nó là phương án tối ưu thì ta dừng lại. Ngược lại, nếu phương án mới chưa tối ưu thì ta sẽ tìm phương án mới tốt hơn và lặp lại các bước bên trên. Thuật toán đơn hình đã được chứng minh là sẽ dừng sau một số hữu hạn bước.

4.4 Thực hành phần mềm

Tính toán với phần mềm Chúng ta có thể sử dụng nhiều phần mềm để giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Sau đây là một số thao tác đơn giản với Excel. Sử dụng Add-in Solver,



Hình 4.1: Thực hiện nhập liệu, đưa các điều kiện vào bảng và xây dựng hàm mục tiêu

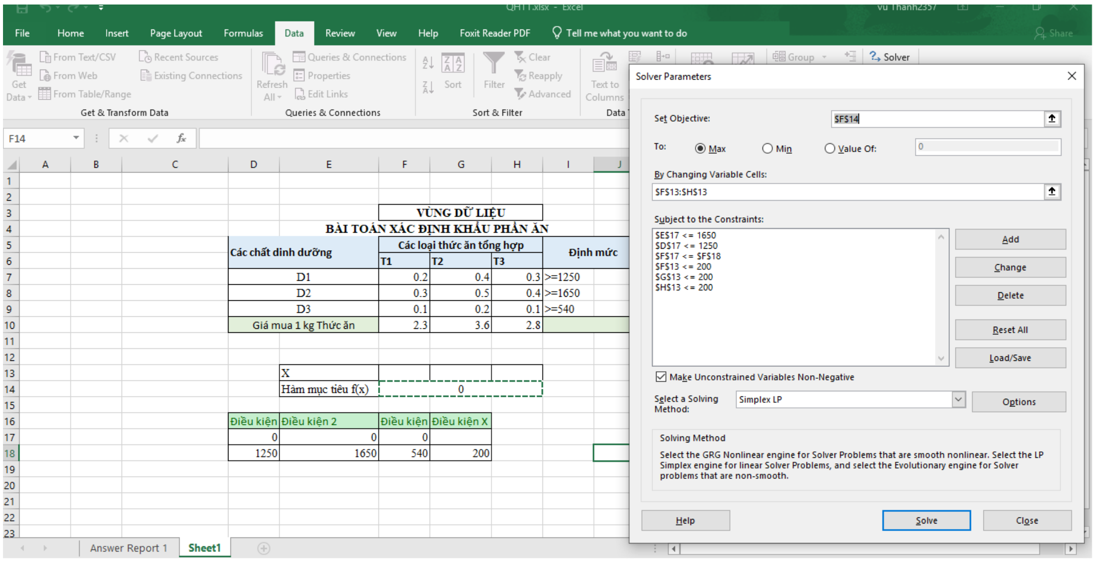
nhập hàm mục tiêu và các điều kiện kèm theo, sau đó yêu cầu "solve": Kết quả thu được

4.5 Một số bài tập và thực hành cuối chương 4

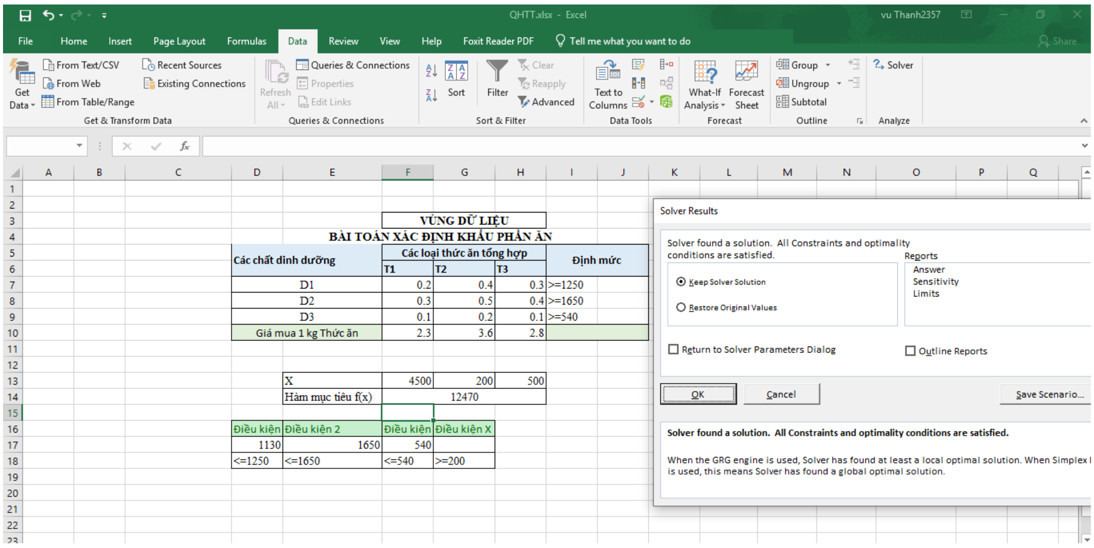
1. (Bài tập nhóm). Nhóm hãy tìm hiểu thêm về các ứng dụng của quy hoạch tuyến tính trong thực tế, chuẩn bị một bài trình bày trước lớp (powerpoint hoặc tương đương).

2. (Bài tập rèn luyện tiếng Anh học thuật). Nghe hiểu và thực hành theo nội dung được trình bày trong video về Excel [1].

[1] https://www.youtube.com/watch?v=dsNQrW7ZiFw



Hình 4.2: Nhập hàm mục tiêu và các điều kiện vào bảng hỏi Solver.



Hình 4.3: Kết quả trả về tự điền vào các ô trống khối lượng của "X" và kết quả của hàm mục tiêu.

3. (Bài tập thực hành). Sử dụng Excel hoặc phần mềm tương đương để giải bài toán vận tải trong phần 4.1 hoặc một bài quy hoạch tuyến tính do bạn tự chọn.