Một số dạng đề thi và giải mẫu

0.1 Đề mẫu 1

Câu 1. Giả sử

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 6 & 9 \\ 7 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 4 \\ 35 & d \end{bmatrix}$$

Chọn đáp án **đúng**.

A. $a = 0, b = 10, c = 9, d = 18$
C. $a = 0, b = 10, c = 18, d = 10$
B. $a = 0, b = 9, c = 10, d = 18$
D. Một đáp án khác.

Câu 2. Tìm m để $\operatorname{rank}(B) = 2$, trong đó $B = \begin{bmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{bmatrix}$

A. $m \neq 0$
C. $m = 0,$ hay $m = 1$
B. $m \neq 1$
D. $m = \frac{-1}{2}$

Câu 3. Xét một thị trường gồm ba loại hàng hoá. Hàm cung, hàm cầu và giá của chúng thoả mãn các điều kiện sau:

$$Q_{s1} = -10 + 6p_1 - 5p_2 + 3p_3 \quad Q_{s2} = -10 + 4p_1 + 4p_2 - 3p_3 \quad Q_{s3} = -20 - 3p_1 + 2p_2 + 3p_3$$
$$Q_{d1} = 35 - 5p_1 + 6p_2 - 2p_3 \quad Q_{d2} = 30 + 5p_1 - 6p_2 + 2p_3 \quad Q_{d3} = 50 - 2p_1 + 6p_2 - 4p_3$$

Xác định lượng cung và cầu cân bằng của từng loại hàng hoá.
A. $Q_{s1} = Q_{d1} = 30; Q_{s2} = Q_{d2} = 35; Q_{s3} = Q_{d3} = 40$
B. $Q_{s1} = Q_{d1} = 40; Q_{s2} = Q_{d2} = 30; Q_{s3} = Q_{d3} = 35$
C. $Q_{s1} = Q_{d1} = 35; Q_{s2} = Q_{d2} = 30; Q_{s3} = Q_{d3} = 40$
D. Một đáp án khác.

Câu 4. Giả sử một quốc gia có ba ngành sản xuất với ma trận hệ số đầu vào là

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Biết nhu cầu cuối của các ngành lần lượt là $130, 30, 20$. Tìm tổng đầu ra x_1, x_2, x_3 của mỗi ngành.

A. $x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 300$
C. $x_1 = 300, x_2 = 200, x_3 = 300$
B. $x_1 = 300, x_2 = 200, x_3 = 200$
D. Một đáp án khác.

Câu 5. Xét các khẳng định dưới đây

1. Nếu hệ chứa vectơ 0 thì hệ phụ thuộc tuyến tính.
2. Hệ có chứa hai vectơ tỷ lệ thì phụ thuộc tuyến tính.
3. Nếu hệ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính thì hệ phụ thuộc tuyến tính.
4. Nếu hệ chứa hệ con độc lập tuyến tính thì hệ cũng độc lập tuyến tính.

Đếm số các khẳng định **sai**.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 6. Tìm A^{-1}, biết

A. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 7. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ $(B) = \big(b_1 = (1, 2, -3), b_2 = (4, 5, 10), b_3 = (7, 11, m^2)\big)$. Xét các khẳng định dưới đây

1. Nếu $m = 2$ thì (B) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Nếu (B) là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $m \neq -1$.
3. (B) là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $m \neq -1$.

Đếm số các khẳng định **sai**.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 8. Cho ma trận $M = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$. Xét các khẳng định dưới đây

1. Tất cả các giá trị riêng của M là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 8$.
2. M chắc chắn chéo hoá được và dạng chéo của M là $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.
3. Các vectơ $\begin{bmatrix} -673 \\ 2019 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 673 \\ 2019 \end{bmatrix}$ là các vectơ riêng của M.

Đếm số các khẳng định **sai**.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 9. Tại một quốc gia, đầu tư cố định của chính phủ là 3500 (triệu USD), mức chi tiêu cố định của chính phủ là 1500 (triệu USD), còn tổng thu nhập quốc dân Y, tổng mức tiêu dùng C và tổng thuế T thoả mãn các điều kiện sau:

$$C = 2000 + 0.5(Y - T), \qquad T = 4100 + 0.1Y.$$

Hãy xác định mức thu nhập quốc dân, tổng mức tiêu dùng và mức thuế ở trạng thái cân bằng kinh tế vĩ mô

A. (4000,5000,9000) C. (5000,4000,9000)
B. (9000,4000,5000) D. (4000,9000,2200)

Câu 10. Cho chi phí $C = C(Q)$, doanh thu $R = R(Q)$ và lợi nhuận $\pi = \pi(Q)$ là các hàm khả vi theo biến sản lượng Q không âm (trong giả thiết các yếu tố khác không đổi). Xét các khẳng định dưới đây.

1. Chi phí biên tại mức sản lượng $Q = Q_o$ là $MC(Q_o) \equiv C'(Q_o)$.
2. Doanh thu biên $MR(Q_o)$ tại mức sản lượng Q_o chính là xấp xỉ lượng thay đổi tương đối của doanh thu khi sản lượng tăng tương đối lên 1% từ mức Q_o lên mức $Q_o + 1\%Q_o$.
3. Hệ số co giãn $\epsilon_{\pi Q}(Q_o)$ của lợi nhuận theo sản lượng tại mức Q_o chính là xấp xỉ lượng thay đổi tuyệt đối của lợi nhuận khi sản lượng tăng lên 1 đơn vị từ mức Q_o lên mức $Q_o + 1$.

Đếm số các khẳng định **sai**.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 11. Một công ty độc quyền sản xuất và tiêu thụ một loại sản phẩm trên thị trường. Giả sử hàm cầu (theo giá P) của sản phẩm đó là $Q = 101 - P$ và chi phí bình quân là $AC = Q^2 + 3Q + 50 + 10Q^{-1}$. Tìm mức sản lượng tối ưu hoá lợi nhuận và tính mức giá tương ứng.

A. $Q = 98, P = 3, \pi_{\max} = 80$ C. $Q = 3, P = 98, \pi_{\max} = 294$
B. $Q = 3, P = 98, \pi_{\max} = 80$ D. Một đáp án khác.

Câu 12. Giả sử doanh thu (đơn vị tính là triệu đồng) $R = R(Q)$ theo sản lượng cầu Q của một doanh nghiệp là một ẩn hàm xác định bởi phương trình theo tham số thời gian t như sau:

$$Q = Q(t) = 3t + 5, \qquad R = R(t) = -3t^3 + 225t + 20000.$$

Tìm mức sản lượng cầu $Q(> 0)$ để tối ưu hoá doanh thu và tính doanh thu tối đa của doanh nghiệp đó.

A. $Q = 5, R_{\max} = 20750$ (triệu đồng) C. $Q = 20, R_{\max} = 20750$ (triệu đồng)
B. $Q = 20, R_{\max} = 500$ (triệu đồng) D. Một đáp án khác.

Câu 13. (Tự luận) Giả sử hàm cầu $P = P(Q)$ biểu thị mối quan hệ giữa giá bán một đơn vị sản phẩm P (đơn vị USD) với sản lượng cầu Q (lượng sản phẩm bán được) là một hàm bậc nhất. Biết rằng nếu giá mỗi đơn vị sản phẩm là $P = 2000$ USD thì sẽ bán được 200 đơn vị sản phẩm. Nếu giảm giá mỗi đơn vị sản phẩm đi 250 USD thì lượng bán sẽ được tăng thêm 50 đơn vị sản phẩm. Chi phí bình quân $AC = 1500$ USD. Tìm mức sản lượng cầu $Q(> 0)$ để tối ưu hoá lợi nhuận và tính mức giá P tương ứng với mức lợi nhuận π tối ưu đó.

Câu 14. (Tự luận) Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền hai loại hàng hoá. Giả sử ứng với các mức sản lượng Q_1, Q_2 (đơn vị sản phẩm) của từng loại hàng hoá, doanh nghiệp có hàm chi phí (đơn vị tính là triệu đồng) như sau:

$$C = C(Q_1, Q_2) = (Q_1 - 125)^{4/3} + (Q_2 - 50)^3 - 3(Q_1 - 125)^{1/3}(Q_2 - 50)^2 + 200$$

Tìm Q_1, Q_2 để chi phí đạt mức tối thiểu.

Hướng dẫn giải.

Câu 1. Bằng cách nhân 2 ma trận bên tay trái của dấu " = ", ta sẽ được một ma trận cấp 2×2. Sau đó so sánh ma trận này với ma trận bên phải của dấu " = ". Ta sẽ được một hệ 2 phương trình tuyến tính theo hai ẩn a, b. Giải hệ phương trình này, ta sẽ được giá trị của a và b.
Câu 2. Ta có thể thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng như sau:

$$d_2 \to d_2 - md_1, \qquad d_3 \to d_3 - md_1.$$

Để rank$(B) = 2$ thì dòng 2 hoặc dòng 3 (của ma trận sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp bên trên) phải khác 0 và dòng còn lại phải tỷ lệ với dòng đó. Trong trường hợp này ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - md_1} [d_3 \to d_3 - md_1] \begin{bmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & m-m^2 & 1-m^2 \end{bmatrix}$$

Như vậy ta suy ra rank$(B) = 2$ khi và chỉ khi hoặc là

$$\{1 - m^2 \neq 0(1 - m^2)^2 - (m - m^2)^2 = 0 \ ,$$

hoặc là

$$\{1 - m^2 \neq 0(1 - m^2)^2 - (m - m^2)^2 = 0$$

Giải các hệ phương trình, bất phương trình trên; ta sẽ được giá trị của m.
Câu 3. Thị trường đạt trạng thái cân bằng khi

$$Q_{s1} = Q_{d1}, \quad Q_{s2} = Q_{d2}, \quad Q_{s3} = Q_{d3}.$$

Thế các hàm theo p_1, p_2, p_3 vào hệ phương trên, ta sẽ được hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn, 3 phương trình. Giải hệ phương trình này, ta sẽ được giá cân bằng. Sau khi được giá cân bằng, thế vào lại các hàm bên trên để đạt được sản lượng cung và cầu cân bằng của từng loại hàng hoá.
Câu 4. Đặt A là ma trận đầu vào. Theo mô hình Input-Output, đầu ra x_1, x_2, x_3 là nghiệm của hệ

$$(I - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình trên, ta sẽ được tổng đầu ra của mỗi ngành.
Câu 5.

1. Vì vectơ 0 luôn biểu diễn tuyến tính được qua mọi hệ vectơ nên hệ chứa vectơ 0 là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

2. Nếu hệ 2 vectơ u, v tỷ lệ thì sẽ tồn tại 2 số thực α, β sao cho $\alpha u + \beta v = 0$. Từ đó ta suy ra hệ phụ thuộc tuyến tính.

3. Giả sử hệ (B_1) là một hệ phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là vectơ 0 có một biểu diễn không tầm thường theo các vectơ trong (B_1) (gọi là biểu diễn số 1). Nếu hệ (B_2) chứa (B_1) thì vectơ 0 sẽ có một biểu diễn không tầm thường trong (B_2) đó là biểu diễn số 1 cộng với tích của hằng số 0 và các vectơ còn lại trong (B_2). Nên hệ (B_2) phụ thuộc tuyến tính.

4. Hệ (v_1) với $v_1 \neq 0$ là một hệ độc lập tuyến tính. Nhưng hệ $(v_1, 2v_1)$ không phải là một hệ độc lập tuyến tính.

Câu 6. Ta có thể tính nghịch đảo của A bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $[A|I]$ về dạng $[I|B]$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3. Lúc đó, ta có B là nghịch đảo của A.
Câu 7. Xét ma trận tạo thành từ các vectơ b_1, b_2, b_3 như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 11 \\ -3 & 10 & m^2 \end{bmatrix}$$

Thì ta có $\det A = -3m^2 + 3$. Do (B) là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $\det A \neq 0$. Nên (B) là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.
Câu 8. Tìm đa thức đặc trưng của $M : P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2)$. Giải nghiệm của đa thức này để tìm các giá trị riêng, từ đó tìm các vectơ riêng và suy ra tính chéo hoá của ma trận. Ngoài ra, để biết một vectơ v có phải là vectơ riêng của M hay không thì ta chỉ cần kiểm tra xem Mv và v có tỷ lệ với nhau hay không.
Câu 9. Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = 2000 + 0.5(Y - T) \\ T = 4100 + 0.1Y \end{cases},$$

trong đó $I = 1500$ là mức chi tiêu của chính phủ, $G = 3500$ là mức đầu tư của chính phủ. Giải hệ phương trình này ta sẽ được mức thu nhập quốc dân, mức tiêu dùng và mức thuế ở trạng thái cân bằng kinh tế vĩ mô.
Câu 10. Xem lại lý thuyết
Câu 11. Từ $Q = 101 - P$, ta suy ra $P = 101 - Q$. Và từ đó suy ra hàm lợi nhuận là

$$\pi = PQ - C = PQ - Q.AC = (101 - Q)Q - Q(Q^2 + 3Q + 50 + 10Q^{-1}).$$

Hàm này là một hàm bậc 3 theo biến Q. Bằng cách tính đạo hàm bậc nhất và bậc hai của π, ta sẽ suy ra ra mức sản lượng tối ưu hoá lợi nhuận.

<u>Câu 12.</u> Ta tính đạo hàm bậc nhất và bậc hai của $R = R(Q)$ theo hàm ẩn cho bởi tham số:

$$R'_Q = \frac{R'_t}{Q'_t}, \qquad \text{và } R''_Q = \frac{(R'_Q)'_t}{Q'_t}.$$

Giải phương trình $R'_Q = 0$ và tính R''_Q tại các điểm đó, để suy ra các điểm cực trị. Từ đó suy ra sản lượng cầu Q để tối ưu hoá doanh thu.

<u>Câu 13.</u> Vì P là một hàm bậc nhất theo Q nên

$$P = a + bQ.$$

Tại mức giá $P = 2000$ USD thì bán được 200 đơn vị sản phẩm nên ta có

$$2000 = a + 200b.$$

Vì nếu giảm giá mỗi đơn vị sản phẩm đi 250 USD thì lượng bán ra sẽ được tăng thêm 50 đơn vị sản phẩm nên ta có

$$(2000 - 250) = a + (200 + 50)b.$$

Từ 2 phương trình tuyến tính trên, ta sẽ tìm ra được giá trị của a và b. Vì chi phí bình quân là $AC = 1500$. Nên ta có hàm lợi nhuận

$$\pi = PQ - Q.AC = Q(a + bQ) - 1500Q$$

là một hàm bậc 2 theo Q. Tính đạo hàm bậc nhất và bậc hai của hàm lợi nhuận này để suy ra sản lượng cầu làm tối ưu hoá lợi nhuận.

<u>Câu 14.</u> Bằng cách tính các đạo hàm bậc nhất theo Q_1 và Q_2 của hàm C. Sau đó giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\delta C}{\delta Q_1} = 0 \\ \frac{\delta C}{\delta Q_2} = 0 \end{cases}$$

để tìm các điểm tới hạn. Cuối cùng ta tính các đạo hàm bậc 2, và thế các điểm tới hạn này vào để suy ra chi phi tối thiểu.